

ation. Ce modèle, que nous appellerons "Modèle Réduit" nous permettra de retrouver certaines lois de l' Harmonie.

Dans un deuxième temps, nous doterons notre modèle d' autres caractéristiques. Ce "Modèle Complet" sera alors capable de retrouver la quasi intégralité des lois de l' Harmonie.

2° . LE MODELE REDUIT.

A. Définition du Modèle Réduit.

Notre Modèle Réduit est constitué par un ensemble de détecteurs répondant aux critères suivants:

1° ensemble est continu et homogène

chaque détecteur est caractérisé par une fréquence propre φ_j

Un son est défini par les fréquences et les amplitudes des sons purs qui le composent. Chacun d' eux sera noté:

$$S = S(f, a)$$

Le son global sera noté:

$$S = \sum_i S_i(f_i, a_i)$$

Quand un son pur $S(f, a)$ frappe le détecteur de fréquence propre $\varphi = f$ le détecteur transmet un message M que nous noterons:

$M = M(f, a)$ d' intensité $i = \mu_j^\varphi A(a)$, $A(a)$ étant une fonction continue monotone croissante, satisfaisant à l' inéquation:

$$A(a+b) < A(a) + A(b).$$

La fonction $A(a) \equiv \text{Log } a$ satisfait notamment à ces conditions.

Quand un son pur $S(2f, a)$ frappe le détecteur de fréquence propre

$\varphi = f$, on peut écrire:

$$M = M(2f, a) \text{ d' intensité } i = \mu_2^\varphi A(a)$$

et de même, p étant un nombre entier:

$$M = M(pf, a) \text{ d' intensité } i = \mu_p^\varphi A(a)$$

les μ_p^φ décroissant rapidement quand p croît.

L' hypothèse d' homogénéité se traduit par:

$$\mu_p^{\varphi_1} = \mu_p^{\varphi_2}$$

A partir de ces données relatives aux messages transmis par un seul détecteur, nous allons maintenant déterminer les messages transmis par l' ensemble du Modèle Réduit ,

B. Messages transmis par le modèle.

a) Définition du Message.

Quand un son S frappe le modèle, celui-ci transmet un message caractérisé:

par les fréquences propres φ_j des détecteurs excités, par les intensités i_j d'excitation de chacun d'eux.

Nous écrirons:

$$M(S) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \dots & \dots & \varphi_p \\ i_j & \dots & \dots & \dots & i_p \end{vmatrix}$$

La première ligne de cette matrice définit les détecteurs excités, la seconde ligne définit leur niveau respectif d'excitation.

b) Transmission de deux sons simultanés.

Quand deux sons S_1 et S_2 frappent simultanément le modèle, le message n'est pas la somme des deux messages correspondant à chaque son individuel, mais une fonction que nous noterons:

$$E(S_1 + S_2) < M(S_1) + M(S_2)$$

c) Comparaison de deux sons distincts.

Il va de soi que le modèle distinguera d'autant plus facilement deux sons l'un de l'autre que les détecteurs excités seront plus différents en noms et en niveaux d'excitation.

SI, par exemple, les deux messages correspondant à deux sons comportent les mêmes détecteurs, et diffèrent uniquement par leurs niveaux d'excitation, les deux sons seront considérés par le modèle comme très voisins, et pourront même, dans certains cas extrêmes, être difficiles à distinguer.

d) Analyse d'un son pur de fréquence f.

Quand un son pur de fréquence f frappe le modèle, il résulte immédiatement de ce qui précède que le message transmis est:

$$M(f, a) = \begin{vmatrix} f/p & \dots & \dots & \dots & f/2 & f \\ \mu_p A(\alpha) & \dots & \dots & \dots & \mu_2 A(\alpha) & \mu_1 A(\alpha) \end{vmatrix}$$

e) Analyse d'un son musical $SM = S(f, a_1) + S(2f, a_2) + \dots + S(kf, a_k)$

Il résulte de ce qui précède que le message global est défini par:

$$M(SM) = E [S(f, a_1) + S(2f, a_2) + \dots + S(kf, a_k)]$$

Pour continuer, il est commode d'attribuer des valeurs numériques aux coefficients μ_i .

En raison de 1^{re} hypothèse d'homogénéité, il suffit de fixer la valeur des coefficients μ_i relatifs à l'un quelconque des détecteurs. Pour ce faire, et en raison de la décroissance des μ_i , admettons que les coefficients de rang supérieurs à 3 sont nuls, les trois premiers décroissant en progression géométrique.

On s'approchera suffisamment de cette hypothèse en admettant:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 \\ \mu_2 &= 1/5 \\ \mu_3 &= 1/25 \end{aligned}$$

D'une façon analogue, les amplitudes des sons harmoniques décroissent généralement assez vite pour les sons musicaux. Admettons que les harmoniques de rang supérieurs à 3 soient négligeables.

Le message global peut alors s'écrire:

$$M(SM) = E [S(f, a_1) + S(2f, a_2) + S(3f, a_3)]$$

Le premier harmonique H_1 donne lieu au message:

$$M_1 = \begin{vmatrix} f/3 & f/2 & f/1 \\ 0,04A(a_1) & 0,2A(a_2) & A(a_1) \end{vmatrix}$$

Le second harmonique H_2 donne lieu au message:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2f/3 & f & 2f \\ 0,04A(a_2) & 0,2A(a_2) & A(a_2) \end{vmatrix}$$

Le troisième harmonique H_3 donne lieu au message:

$$M_3 = \begin{vmatrix} f & 3f/2 & 3f \\ 0,04A(a_3) & 0,2A(a_3) & A(a_3) \end{vmatrix}$$

Faisons sur la valeur des $A(a_i)$ des hypothèses comparables à celles que nous avons faites à propos des μ_i . Nous aurons de même:

$$\begin{aligned} A(a_1) &= 1 \\ A(a_2) &= 0,2 \\ A(a_3) &= 0,04 \end{aligned}$$

Le message global est alors:

$$M(SM) = \begin{vmatrix} f/3 & f/2 & 2f/3 & f & 3f/2 & 2f & 3f \\ 0,04A(a_1) & 0,2A(a_1) & 0,04A(a_2) & E[A(a_1) + 0,2A(a_2) + 0,04A(a_3)] & 0,2A(a_3) & A(a_2) & A(a_1) \end{vmatrix}$$

Remplaçons les coefficients $A(a_i)$ par leurs valeurs, il vient:

$$M(SM) = \begin{vmatrix} f/3 & f/2 & 2f/3 & f & 3f/2 & 2f & 3f \\ 0,04 & 0,2 & 0,008 & E(1 + 0,04 + 0,0016) & 0,008 & 0,2 & 0,004 \end{vmatrix}$$

Par hypothèse, on peut écrire:

$$1 = E(1) < E(1 + 0,04 + 0,0016) < E(1) + E(0,04) + E(0,0016)$$

Nous en déduisons:

$$E(1 + 0,04 + 0,0016) \neq 1$$

De ces résultats, nous pouvons enfin déduire la matrice définissant le message transmis par le Modèle Réduit quand il est frappé par un son musical de timbre tel que, seuls, les trois premiers harmoniques sont perceptibles, tous les trois ayant des amplitudes décroissant rapidement.

Ecrivons donc cette matrice:

$$M(SM) = \begin{pmatrix} f/3 & f/2 & 2f/3 & f & 3f/2 & 2f & 3f \\ 0,04 & 0,2 & 0,008 & 1 & 0,008 & 0,2 & 0,004 \end{pmatrix}$$

Ce résultat est fondamental dans notre travail. C' est lui qui servira de base à toutes nos conclusions, tant à partir du Modèle Réduit que du Modèle Complet.

On peut déjà tirer de ce résultat un certain nombre de conséquences.

- Le détecteur le plus excité est celui dont la fréquence propre est égale à la fréquence du son fondamentale
- Ensuite, les deux détecteurs les plus excités sont ceux placés aux 1^{re} octave grave et à 1^{re} octave aiguë de celui-ci
- Enfin, lo^un derrière, on trouve les détecteurs placés à la douzième, et à la quinte, graves, ainsi que les détecteurs placés à la douzième, et à la quinte, aiguës.

C. Analyse des divers intervalles.

a) Analyse de deux sons en rapport d' octave.

Les messages correspondant à deux sons musicaux en rapport d' octave s' écrivent respectivement:

$$M(f) = \begin{pmatrix} f/3 & f/2 & 2f/3 & f & 3f/2 & 2f & 3f \\ 0,04 & 0,2 & 0,008 & 1 & 0,008 & 0,2 & 0,004 \end{pmatrix}$$

$$M(2f) = \begin{pmatrix} 2f/3 & f & 4f/3 & 2f & 6f/2 & 4f & 6f \\ 0,04 & 0,2 & 0,008 & 1 & 0,008 & 0,2 & 0,004 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices nous montrent aussitôt:

- que le détecteur le plus excité de chaque matrice se retrouve dans l' autre avec un niveau d' excitation assez élevé
 - que, sur quatorze détecteurs mis en cause, quatre sont communs
- Les deux messages diffèrent donc seulement:
- par le niveau d' excitation des détecteurs principaux

- par le nom des détecteurs secondaires.

b) Analyse de deux sons en rapport de quinte.

Les messages correspondant à deux sons en rapport de quinte s' écrivent respectivement:

$$M(f) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline f/3 & f/2 & 2f/3 & f & 3f/2 & 2f & 3f & \\ \hline 0,04 & 0,2 & 0,008 & 1 & 0,008 & 0,2 & 0,04 & \\ \hline \end{array}$$

$$M(3f/2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline f/2 & 3f/4 & f & 3f/2 & 9f/4 & 3f & 9f/2 & \\ \hline 0,04 & 0,2 & 0,008 & 1 & 0,008 & 0,3 & 0,04 & \\ \hline \end{array}$$

Ces deux matrices nous montrent aussitôt:

- que le détecteur le plus excité de chaque matrice se retrouve dans l' autre avec le niveau le plus faible.
- que, sur quatorze détecteurs mis en cause, quatre sont communs, mais avec un niveau très faible dans au moins une des matrices.

Les deux matrices diffèrent donc :

- par le niveau d' excitation très différent des détecteurs principaux
- par le nom des détecteurs secondaires.

c) Analyse de deux sons en rapport de quarte.

Les messages correspondant à deux sons en rapport de quarte s' écrivent respectivement:

$$M(f) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline f/3 & f/2 & 2f/3 & f & 3f/2 & 2f & 3f & \\ \hline 0,04 & 0,2 & 0,008 & 1 & 0,008 & 0,2 & 0,04 & \\ \hline \end{array}$$

$$M(4f/3) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 4f/9 & 2f/3 & 8f/9 & 4f/3 & 2f & 8f/3 & 4f & \\ \hline 0,04 & 0,2 & 0,008 & 1 & 0,008 & 0,2 & 0,04 & \\ \hline \end{array}$$

Ces deux matrices nous montrent aussitôt:

- que les détecteurs les plus excités de chaque matrice ne se retrouvent pas dans l' autre
- que, sur quatorze détecteurs mis en cause, deux seulement sont communs, et encore avec le niveau d' excitation le plus faible dans l' une des matrices.

Les deux messages diffèrent donc:

- par le nom des détecteurs principaux
- par le niveau d' excitation de quelques détecteurs secondaires communs
- par le nom des autres détecteurs secondaires.

d) Analyse de deux sons en rapport de sixte majeure

Les messages correspondant à deux sons en rapport de sixte majeure s' écrivent respectivement:

$$M(f) = \begin{array}{ccccccc} f/3 & f/2 & 2f/3 & f & 3f/2 & 2f & 3f \\ 0,04 & 0,2 & 0,008 & 1 & 0,008 & 0,2 & 0,04 \end{array}$$

$$M(5f/3) = \begin{array}{ccccccc} 5f/9 & 5f/6 & 10f/9 & 5f/3 & 5f/2 & 10f/3 & 5f \\ 0,04 & 0,2 & 0,008 & 1 & 0,008 & 0,2 & 0,04 \end{array}$$

Ces deux matrices nous montrent aussitôt que les deux messages différents par tous les détecteurs: il n' en existe aucun en commun.

e) Analyse des autres intervalles

Le même calcul, conduit pour les autres intervalles aboutit au même résultat: pour les intervalles autres que l' octave, la quinte et la quarte il n' ya aucun détecteur commun.

D. Lois établies par le Modèle Réduit.

A partir des règles de fonctionnement dont nous avons doté notre Modèle Réduit, nous sommes arrivés à un certain nombre de résultats formels. Nous allons maintenant traduire ces résultats en "langage harmonique", construisant ainsi la Théorie de l' Harmonie que construirait notre Modèle Réduit.

a) Loi de Résolution

Quand un son musical frappe le Modèle Réduit, le détecteur le plus grave excité est placé à la douzième grave, celui d' après à la quinte grave. Le Modèle "croit" donc entendre un son situé à la douzième ou à la quinte grave. Si on lui fait entendre ensuite un tel son, il lui trouvera un rapport de parenté immédiat avec le premier: il trouvera qu' il y avait là une "Résolution" naturelle.

Le même phénomène devrait se produire avec les sons placés à la quinte et à la douzième aigües. La résolution à la quinte aigüe serait aussi naturelle que la résolution à la quinte grave.

Nous reviendrons plus loin sur ce point.

b) Parenté des notes en rapport d' octave

Le Modèle Réduit trouvera une très grande parenté entre deux notes en rapport d' octave? Dans certains cas il pourra même avoir de la peine à les distinguer.

c) Parenté des notes en rapport de quinte

Le Modèle Réduit trouvera une certaine parenté entre les notes en rapport de quinte, bien moindre cependant que celle existant entre les notes en rapport de octave.

d) Parenté des notes en rapport de quarte

Le Modèle Réduit trouvera une parenté très faible entre les notes en rapport de quarte.

e) Parenté entre les notes formant les autres intervalles

Le Modèle Réduit ne trouvera aucune parenté entre les notes formant des intervalles autres que l' octave, la quinte ou la quarte.

f) Accoutumance à certains intervalles

Chaque son pur frappant le Modèle Réduit, donc chaque bruit et chaque son musical excite dans le Modèle Réduit des détecteurs à intervalle de quinte et de douzième. Par accoutumance, ces intervalles passeront pour "naturels", ce qui renforcera encore les sentiments de parenté existant entre les sons en rapport de quinte. Il se passe un phénomène analogue pour la quarte et, à un moindre degré pour les neuvièmes et leur redoublement.

3° . LE MODELE COMPLET.

A. Définition du Modèle Complet.

Le Modèle Complet résulte de l' existence d' une grandeur que nous allons définir maintenant, et qui se superpose aux autres phénomènes qui se déroulent au sein du Modèle Réduit.

a) Le phénomène produit par l' excitation de deux ou plusieurs détecteurs simultanément ne peut pas se ramener à la simple connaissance du nom et du niveau d' excitation de chacun d' eux. Il nécessite l' introduction d' une nouvelle grandeur.

Nous appellerons cette nouvelle grandeur l' "effet d' accord". Nous la noterons η .

b) L' effet d' accord peut prendre des valeurs plus ou moins grandes, négatives, positives ou nulles.

c) Quand deux détecteurs seulement sont excités, l' effet est d' autant plus important, en valeur absolue,
- que les niveaux d' excitation des deux détecteurs sont plus voisins
- que ce niveau d' excitation est plus élevé.

d) Quand deux détecteurs seulement sont excités, l' effet d' accord peut être mesuré par le rapport dans lequel les ~~Transformées~~ Transformées

Logarithmiques des fréquences propres des/détecteurs concernés divisent les transformées logarithmiques des fréquences en rapport d' octave.

Nous appellerons "ordre" et nous noterons ω d' un intervalle le dénominateur de la fraction réduite mesurant ce rapport.

Nous poserons que l' effet d' accord est positif pour des ordres inférieurs à 5, nul pour des ordres égaux à 5, négatif pour des ordres supérieurs à 5; l' effet d' accord étant une fonction monotone continue décroissante de l' ordre.

e) Quand plusieurs détecteurs sont simultanément excités, il en résulte pour le Modèle Complet un seul effet d' accord, résultant de la superposition des effets d' accord élémentaires existant entre tous les couples détecteurs qu' il est possible de considérer.

Nous noterons ainsi l' effet d' accord résultant de l' excitation simultanée de plusieurs détecteurs: $\eta = \parallel a_1 f_1 \dots f_n \parallel$

Quand deux détecteurs sont seuls en cause, avec le même niveau d' excitation, nous poserons:

$$\eta_{12} = a \parallel f_1 f_2 \parallel$$

f) Propriétés d' additivité

Quand plusieurs détecteurs sont simultanément excités, l' effet d' accord global est défini par l' opérateur:

$$\eta_{12\dots n} = \oplus (\eta_{12} + \eta_{13} + \dots + \eta_{1n} + \dots + \dots + \eta_{n-1 n})$$

L' opérateur \oplus obéit aux règles suivantes.

Règle I

Quand tous les η_{ij} sont positifs, on peut écrire:

$$\oplus (\eta_{12} + \eta_{13} + \dots + \eta_{1n} + \dots + \eta_{n-1 n}) > \text{le plus grand des } \eta_{ij}$$

Règle II

Quand tous les η_{ij} sont négatifs, on peut écrire:

$$\oplus (\eta_{12} + \eta_{13} + \eta_{1n} + \dots + \eta_{n-1 n}) < \text{le plus petit des } \eta_{ij}$$

Règle III

Cette règle est celle qui régit le cas général, dans laquelle il y a à la fois des effets d' accords négatifs, positifs ou nuls.

Soit $\oplus (\sum \eta_{ij})$ l' effet d' accord que produiraient, s' ils étaient seuls en cause les détecteurs produisant des effets négatifs, considérés deux par deux.

Soit $\oplus (\sum \eta_{i+j})$ l' effet d' accord global que produiraient s' ils étaient seuls en cause, les détecteurs produisant des effets négatifs considérés deux par deux

Soit $\textcircled{M}''(\sum \eta_{i'j'})$ l'effet d'accord global que produiraient s'ils étaient seuls en cause, les détecteurs produisant, deux par deux, des effets d'accords positifs.

Nous aurons alors:

$$\textcircled{M}(\sum \eta_{ij}) < \text{le plus petit des } \eta_{ij} < 0$$

$$\textcircled{M}'(\sum \eta_{i'j'}) = 0$$

$$\textcircled{M}''(\sum \eta_{i'j'}) > \text{le plus grand des } \eta_{i'j'} > 0$$

Soit alors $\textcircled{M}'''(\sum \eta_{kl})$ l'effet global produit par l'ensemble des détecteurs.

Nous aurons:

$$\textcircled{M}(\sum \eta_{ij}) < \textcircled{M}'''(\sum \eta_{kl}) < \textcircled{M}''(\sum \eta_{i'j'})$$

g) Remarque

Ces définitions de la grandeur η et de l'opérateur \textcircled{M} constituent la partie la plus importante et la plus originale de ce travail.

Nous verrons en effet que la grandeur définie pour le modèle comme "effet d'accord", obéit aux mêmes lois que l'agrément auditif défini plus haut, et que l'on peut ainsi donner une classification cohérente de toutes les lois empiriques de l'Harmonie.

B. Effet d'accord élémentaire produit par l'excitation simultanée de deux détecteurs présentant entre eux différents intervalles:

a) Introduction.

Nous nous placerons, pour raison de simplicité, dans le cas de deux détecteurs excités de la même manière. Pour passer au cas général, il suffira de réduire les effets d'accords ainsi déterminés au fur et à mesure que les niveaux d'excitation des détecteurs concernés s'éloignent l'un de l'autre.

Pour mesurer aisément l'ordre des différents intervalles, nous nous placerons dans le cadre de la gamme dodécaphonique tempérée. Nous utiliserons cependant simultanément les résultats déduits de l'étude du Modèle Réduit, qui furent établis en partant de la gamme engendrée par la suite des quintes. Nous admettons que la structure du Modèle en détecteurs n'est pas assez ^{fine} pour lui permettre de distinguer entre les deux gammes.

b) Calcul des rapports des Transformées Logarithmiques

La gamme dodécaphonique tempérée est caractérisée par l'égalité de tous les demi-tons chromatiques. La valeur commune du rapport des fréquences

ces des deux sons qui les constitue est alors donnée par:

$$\frac{f(S+1)}{f(S)} = \sqrt[12]{2}$$

ce qui donne pour le rapport des fréquences d' un intervalle comprenant p demi-tons:

$$\frac{f(S+p)}{f(S)} = 2^{p/12}$$

ou:

$$\text{Log } f(S+p) - \text{Log } f(S) = \frac{p}{12} [\text{Log } 2f(S) - \text{Log } f(S)]$$

Ce résultat peut s' écrire:

$$\frac{\text{Log } f(S+p) - \text{Log } f(S)}{\text{Log } 2f(S) - \text{Log } f(S)} = \frac{p}{12} = \rho$$

En d' autres termes, dans l' espace des transformées logarithmiques, les douze transformées des douze notes de la gamme tempérée dodécaphonique découpent en douze segments égaux le segment déterminé par les transformées des deux notes extrêmes en rapport d' octave.

Nous allons maintenant calculer l' ordre ω des divers intervalles musicaux.

b) Calcul de l' ordre des différents intervalles.

i) Octave.

L' octave est déterminé par $p = 12$, l' ordre ω est donc, d' après la formule précédente, et puisque

$$\omega (\text{octave}) = 1$$

$$\rho = \frac{12}{12} = 1$$

ii) Quarte augmentée.

La quarte augmentée est définie par $p = 6$, ce qui donne de même

$$\rho = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{et,}$$

$$\omega (\text{quarte augmentée}) = 2$$

iii) Tierce majeure et sixte mineure.

On trouve de même, pour la tierce majeure $\rho = 1/3$, et pour la sixte mineure, $\rho = 2/3$, donc

~~$$\omega (\text{tierce majeure et sixte mineure}) = 3$$~~

iv) Tierce mineure et sixte majeure.

On trouve de même, pour la tierce mineure $\rho = 1/4$, et pour la sixte majeure $\rho = 3/4$, donc

$$\omega (\text{tierce mineure et sixte majeure}) = 4$$

v) ~~Seconde majeure et septième mineure.~~

v) Seconde majeure et septième mineure.

On trouve de même, pour la seconde majeure $p = 1/6$, et pour la septième mineure $p = 5/6$, donc:

$$\omega(\text{seconde majeure et septième mineure}) = 6$$

vi) Quarte et quinte.

On trouve de même, pour la quarte $p = 5/12$, et pour la quinte $p = 7/12$ donc:

$$\omega(\text{quarte et quinte}) = 12$$

vii) Seconde mineure et septième majeure

On trouve de même pour la seconde mineure $p = 1/12$, et pour la septième majeure $p = 11/12$, donc

$$\omega(\text{seconde mineure et septième majeure}) = 12$$

c) Classement par "effet d' accord" des divers intervalles.

Il résulte de ce qui précède que l' on aboutit au classement suivant, par ordre d' effet d' accord décroissant. Rappelons encore qu' il s' agit là du cas où un seul couple est excité avec le même niveau d' excitation.

i) $\omega = 1$. Octave . L' effet d' accord est très positif.

ii) $\omega = 2$. Quarte augmentée . l' effet est légèrement moins important

iii) $\omega = 3$. Tierce majeure et sixte mineure. L' effet est légèrement moins important

iv) $\omega = 4$; Tierce mineure mineure et sixte majeure. l' effet est presque nul.

v) $\omega = 6$. Seconde majeure et septième mineure. L' effet est légèrement négatif.

vi) $\omega = 12$. Quarte et quinte, seconde mineure et septième majeure. L' effet est fortement négatif.

C. Effet d' accord global produit quand deux sons musicaux frappent le Modèle Complet.

a) Analyse de l' effet d' accord produit par deux sons en rapport ~~de~~ d' octave.

Nous avons vu que, avec les hypothèses faites, on peut rencontrer quatre niveaux d' excitation différents: 1, 0,2, 0,04, 0,008. Nous admettrons que, entre des détecteurs excités à des niveaux différents, la différence de niveau est trop importante pour produire un effet d' accord notable.

Nous nous bornerons donc à comparer les détecteurs excités au même niveau. Nous trouverons ainsi;

i) Deux détecteurs à niveau 1, en rapport d' octave: ordre 1.